Московский физико-технический институт
(государственный университет)

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В ВОЛНОВОДАХ

Лабораторная работа № **148**

МОСКВА 2006

148. Электромагнитные волны в волноводах

Цель работы: ознакомление с методами получения и анализа электромагнитных волн СВЧ-диапазона.

В работе используются: генератор СВЧ типа Г4-83, измерительная линия Р1-28, усилитель 28 ИМ, заглушка, отрезок волновода с поглощающей нагрузкой, отрезки волноводов различных сечений, детекторная головка.

Передача энергии электромагнитных (э.м.) колебаний низкой частоты (скажем, 50 Гц) не представляет проблем и делается широко известным способом — по проводам. На более высоких частотах (до 300 МГц) эта задача решается с помощью двухпроводных линий и коаксиальных кабелей. На ещё более высоких частотах (до 300 ГГц), при колебаниях с длинами волн (в вакууме) от 1 метра до 1 миллиметра (этот диапазон называется *диапазоном сверхвысоких частот* или, сокращённо, СВЧ), передача энергии с помощью двухпроводной линии или коаксиальных кабелей становится малоэффективной из-за больших потерь: во-первых, резко возрастает сопротивление проводов из-за *скин-эффекта* — вытеснения тока на поверхность (skin-кожа), а в двухпроводной линии, кроме того, потери растут вследствие излучения энергии в окружающее пространство ($\sim \nu^4$).

В СВЧ-диапазоне энергия передаётся с помощью металлических труб, называемых волноводами (в миллиметровом диапазоне длин волн волноводы могут быть сделаны и из диэлектрика). Электромагнитные волны могут распространяться по металлическим трубам любого профиля, но из технологических соображений сечения волноводов делаются либо круглыми, либо прямоугольными.

Чтобы найти структуру э.м. поля в волноводе, надо решить уравнения Максвелла с соответствующими граничными условиями. Решение этой задачи приведено во многих учебниках, например, в [2]. Мы построим э.м. поле в волноводе, складывая падающую и отражённые от стенок плоские волны. Такой метод называется *концепцией Бриллюэна.*

Рассмотрим отражение плоской э.м. волны от идеально проводящей, бесконечно протяжённой плоской поверхности $x = 0$ (рис. 1). Пусть вектор напряжённости электрического поля падающей волны $\boldsymbol{E}$ параллелен этой плоскости. В наших обозначениях вектор $\boldsymbol{E}_{\text{пад}}$ направлен по оси Y (на нас). Фронт волны, падающей под углом θ к нормали, показан на рис. 1 пунктиром. Оба вектора напряжённости $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ лежат в плоскости фронта волны, им перпендикулярен волновой вектор $\boldsymbol{k}$, описывающий распространение волны.

Абсолютное значение волнового вектора $\boldsymbol{k}$ — волновое число — равно

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v_ф}, \tag{1}$$

где λ — длина волны, ω — круговая частота, $v_ф$ — фазовая скорость волны, которая в пустом пространстве совпадает со скоростью света.

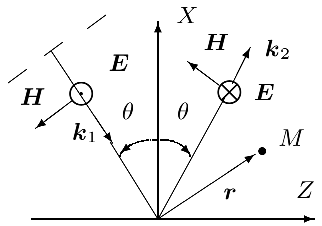

Рис. 1. Отражение плоской волны от проводящей плоскости

Рассмотрим некоторую произвольную точку M на рис. 1. В неё приходят две волны: падающая — $\boldsymbol{E}_{пад}$ и отражённая от плоскости — $\boldsymbol{E}_{отр}$. Будем отсчитывать расстояния от начала координат (от точки 0), а время t — от момента прихода фронта падающей волны в точку 0. Тогда

$$E_{пад} = E_0 \cdot e^{i(\omega t - \boldsymbol{k}_1 \boldsymbol{r})}, \tag{2}$$

$$E_{отр} = -E_0 \cdot e^{i(\omega t - \boldsymbol{k}_2 \boldsymbol{r})}, \tag{3}$$

где $k_1 = k_2 = \omega/c$. Проекции волновых векторов на оси координат:

$$\begin{aligned} k_{1x} &= -k\cos\theta, \quad k_{1z} = k\sin\theta, \\ k_{2x} &= k\cos\theta, \qquad k_{2z} = k\sin\theta. \end{aligned} \tag{4}$$

Знак минус в отражённой волне связан со сдвигом фаз на 180°, возникающим при отражении волны от проводящей плоскости. Суммарное электрическое поле в точке M имеет вид

$$E = E_0 \left[e^{i(\omega t - \boldsymbol{k}_1 \boldsymbol{r})} - e^{i(\omega t - \boldsymbol{k}_2 \boldsymbol{r})}\right]. \tag{5}$$

Подставляя в (5) координаты вектора $\boldsymbol{r}(x, 0, z)$ и значения соответствующих проекций векторов $\boldsymbol{k}_1$ и $\boldsymbol{k}_2$ из (4), найдём

$$E = 2iE_0 \sin(kx\cos\theta) e^{i\omega(t - z\sin\theta/c)}. \tag{6}$$

Это выражение описывает волну с амплитудой

$$2iE_0 \sin(kx\cos\theta), \tag{7}$$

бегущую в направлении z с фазовой скоростью

$$v_ф = \frac{c}{\sin\theta}. \tag{8}$$

Отметим две важные особенности этой волны: 1) её фазовая скорость больше скорости света; 2) при фиксированном угле θ амплитуда поля гармонически зависит от x и не меняется со временем. Иначе говоря, в результате интерференции падающей и отражённой волн в пространстве над проводящей поверхностью в направлении оси X образуется система стоячих волн. Электрическое поле стоячей волны равно нулю в точках, где $kx\cos\theta = n\pi$, т.е. там, где

$$x = \frac{n\pi}{k\cos\theta}; \qquad n = 0, 1, 2, ... \tag{9}$$

Таким образом, поверхность нулевого электрического поля представляет собой плоскость, параллельную отражающей поверхности. Расположим в этой плоскости вторую проводящую поверхность. Эта поверхность не исказит полученного распределения поля, т.к. на ней автоматически удовлетворяются граничные условия $E(t) = 0$. Точно такие же плоскости можно поставить, например, при $y = 0$ и $y = b$. Эти плоскости нормальны электрическим силовым линиям, и на них выполняются граничные условия.

Итак, мы показали, что в волноводе прямоугольного сечения может распространяться э.м. волна, которую в пределах волновода можно рассматривать как результат суперпозиции двух плоских волн. Каждая плоская волна является чисто поперечной, так что электрическое и магнитное поля перпендикулярны к направлению их распространения. В суммарной волне электрическое поле имеет только составляющую E_y и, следовательно, перпендикулярно оси волновода, а магнитное поле имеет составляющие H_x и H_z.

Электромагнитное поле в волноводе не является чисто поперечным, а имеет продольные составляющие.

В рассмотренном случае отлична от нуля продольная составляющая магнитного поля, и поэтому такую волну называют *магнитной (H-волна)*. Мы могли бы взять другую поляризацию исходной падающей волны ($H = H_y$), и тогда возникла бы *электрическая волна* с $E_z \neq 0$ (*E-волна*).

Посмотрим на соотношение (9) с другой стороны. Если даны две параллельные проводящие плоскости, расположенные на расстоянии a друг от друга, то между ними могут распространяться волны, если

$$\cos\theta_n = \frac{n\pi}{ka} = \frac{n\lambda_0}{2a} = \frac{n\pi c}{a\,\omega}, \tag{10}$$

где λ_0 — длина волны в свободном пространстве.

Как ясно из (10), движение э.м. волны по волноводу возможно, если углы падения подчиняются условию

$$\cos\theta_n = \frac{n\lambda_0}{2a} \leqslant 1, \tag{11}$$

поэтому для каждого n существует наибольшая критическая длина волны и соответственно наименьшая критическая частота, при которых волна ещё может проходить через волновод. Нижняя критическая частота

$$\omega_{\text{кр}} = \frac{\pi c}{a} \tag{12}$$

и верхняя критическая длина волны

$$\lambda_{\text{кр}} = 2a \tag{13}$$

соответствуют $n = 1$.

С помощью (8), (10) и (12) нетрудно найти выражение для фазовой скорости э.м. волны, распространяющейся в волноводе:

$$v_{\text{ф}} = \frac{c}{\sin\theta} = \frac{c}{\sqrt{1-\cos^2\theta}} = \frac{c}{\sqrt{1-(\omega_{\text{кр}}/\omega)^2}}. \tag{14}$$

Фазовая скорость (скорость перемещения поверхности постоянной фазы $v_{\text{ф}} = \omega/k$) в волноводе больше скорости света в пустоте, а групповая (скорость распространения возмущения $u = d\omega/dk$) всегда меньше. Интересно отметить, что фазовая скорость зависит от частоты. В таких случаях говорят, что среда (в данном случае — волновод) обладает дисперсией.

С помощью (1) и (14) можно найти волновое число k_z, описывающее распространение волны вдоль волновода:

$$k_z = \frac{\omega}{v_{\text{ф}}} = \frac{\omega}{c}\sqrt{1-\left(\frac{\omega_{\text{кр}}}{\omega}\right)^2}. \tag{15}$$

Из этого выражения следует, что по мере убывания частоты волновое число k_z уменьшается и, наконец, при $\omega < \omega_{\text{кр}}$ (или, что то же, $\lambda_0 > 2a$) оно становится мнимым. Это означает, что при частотах $\omega < \omega_{\text{кр}} = \pi c/a$ волны вдоль трубы экспоненциально затухают. Поэтому критическую частоту называют граничной частотой волновода.

Преобразуя соотношение (15), можно связать длины волн в волноводе ($\lambda_{\text{в}}$), в открытом пространстве (λ_0) и критическую ($\lambda_{\text{кр}}$):

$$\frac{1}{\lambda_{\text{в}}^2} = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_{\text{кр}}^2}. \tag{16}$$

Ясно, что никакой выделенности оси X нет, и поэтому точно так же может образоваться синусоидальное распределение поля и вдоль оси Y. Поэтому для каждого вида E- и H-волны получается бесчисленное множество решений, каждое из которых имеет свою критическую частоту и длину волны. В случае прямоугольного волновода с поперечными размерами a и b все возможные критические длины волн определяются общей формулой

$$\lambda_{\text{кр}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{m}{2a}\right)^2 + \left(\frac{n}{2b}\right)^2}},$$

где m и n — целые числа. Величина m представляет собой полное число полупериодов изменения той или иной составляющей поля вдоль пути, идущего параллельно широкой стенке волновода (a), а n — то же для узкой стенки (b). Эти же символы употребляются и в обозначениях волн — соответственно E_{mn} или H_{mn}. Обычно для передачи СВЧ-энергии по прямоугольным волноводам используется волна H_{10}. Её критическая длина волны — максимальная среди всех типов волн в прямоугольном волноводе, и поэтому её называют *основной*. Тем самым, для волновода заданного сечения существует диапазон частот, ограниченный снизу критической частотой волны H_{10} ($\lambda_{\text{кр}} = 2a$), а сверху — критической частотой следующей распространяющейся волны (например, H_{10} с $\lambda_{\text{кр}} = 2b$ или H_{20} с $\lambda_{\text{кр}} = a$). В этом частотном диапазоне СВЧ-энергия переносится только одним типом волн, что существенно облегчает её дальнейшее использование.

Если в волноводе имеется какое-либо препятствие, нерегулярность (в предельном случае он просто закрыт металлической пластиной), то в нём появляется отражённая волна. Падающая и отражённая волны интерферируют и создают в волноводе стоячую волну, похожую на стоячие волны в струне. Запишем прямую волну, движущуюся в положительном направлении оси Z, в виде

$$E_1 = E_0 e^{i(\omega t - k_z z)},$$

а отражённую — в виде

$$E_2 = \rho E_0 e^{i(\omega t + k_z z + \varphi)}, \tag{17}$$

где ρ — коэффициент отражения по амплитуде, а φ — фаза отражённой волны. Суммарное поле в волноводе имеет вид

$$E(z) = E_1 + E_2 = E_0 e^{-ik_z z}\bigl(1 + \rho e^{i(2k_z z + \varphi)}\bigr)e^{i\omega t} = A_0 e^{i\omega t}.$$

Из этого выражения видно, что в каждом сечении волновода ($z = \text{const}$) поле зависит от времени по гармоническому закону, а квадрат амплитуды равен

$$A_0^2 = E_0^2 \left[1 + \rho^2 + 2\rho\cos(2k_z z + \varphi)\right]. \tag{18}$$

Максимальное (в пучности) и минимальное (в узле) значения поля равны соответственно:

$$E_{\max} = E_0\,(1+\rho), \quad E_{\min} = E_0\,(1-\rho). \tag{19}$$

Из формулы (18) следует, что расстояние l между соседними узлами (или пучностями) составляет

$$l = \frac{\pi}{k_z} = \frac{\lambda_\text{в}}{2}. \tag{20}$$

Это даёт удобный способ измерения длины волны $\lambda_\text{в}$ в волноводе. Отношение

$$K = \frac{E_{\max}}{E_{\min}} \tag{21}$$

называется *коэффициентом стоячей волны* (к.с.в.). Из (19) следует, что коэффициент отражения от препятствия по амплитуде

$$\rho = \frac{E_{\max} - E_{\min}}{E_{\max} + E_{\min}} = \frac{K-1}{K+1}. \tag{22}$$

В случае полного отражения (металлическая заглушка) $\rho = 1$, а если в волновод вставлено вещество, поглощающее СВЧ-излучение (согласованная нагрузка), то $\rho = 0$.

Для определения коэффициента стоячей волны обычно используют измерительную линию — отрезок волновода с продольной щелью длиной в несколько полуволн. В щели располагается зонд — небольшой металлический штырь (антенна), реагирующий на электрическое поле в волноводе. Напряжение высокой частоты, наводимое на зонд, детектируется, усиливается и подаётся на микровольтметр. Зонд может перемещаться вдоль линии — это позволяет исследовать распределение электрического поля в волноводе.

А. Волны в волноводе при частоте выше критической

Экспериментальная установка. Схема для исследования структуры волн в волноводе при частоте выше критической представлена на рис. 2. Модулированный сигнал от высокочастотного генератора (цуги с частотой повторения 1 кГц) поступает на вход A измерительной линии, вдоль

которой перемешается зонд S. Высокочастотный сигнал с зонда поступает на кристаллический детектор D[1].

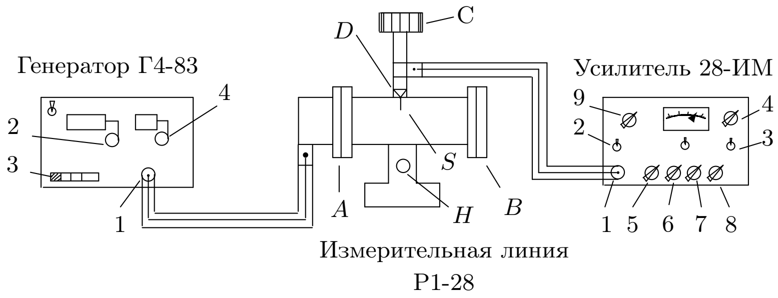

Рис. 2. Схема для исследования структуры волн СВЧ

С нагрузки детектора (с RC-цепочки) снимается огибающая высокочастотного сигнала и подаётся на усилитель низкой частоты. Величина сигнала регистрируется вольтметром, вмонтированным в усилитель. Ручка C — настройка измерительной линии — служит для согласования зонда (как антенны) со входом усилителя. Как правило, они согласованы, и в настройке нет необходимости. В волноводе с закрытым выходом образуется стоячая волна. Определив расстояние между узлами, можно рассчитать длину волны и фазовую скорость СВЧ-сигнала в волноводе. Устройство детекторной головки, установленной на измерительной линии, таково, что отклик вольтметра U на величину напряжённости электрического поля E в волноводе

$$U \sim E^n, \tag{23}$$

а показатель степени n сам зависит от величины сигнала: при малых сигналах детектирование квадратичное ($n = 2$), при больших — линейное ($n = 1$). Если известно распределение поля $E(z)$ вдоль измерительной линии, то, изучив распределение $U(z)$, можно по графику $\ln(U) = f[\ln(E)]$ определить характер детектирования: в двойном логарифмическом масштабе любая степенная функция — прямая линия, по наклону которой

[1] В нашей установке измерение сигналов СВЧ может производиться как с помощью кристаллического детектора, в цепи нагрузки которого под действием СВЧ колебаний появляется постоянный ток, так и с помощью болометра,в котором энергия электромагнитного излучения преобразуется в тепло и измеряется происходящим при этом изменением электрического сопротивления прибора (в качестве болометра может использоваться термистор, бареттер, плёночные сопротивления). В нашей работе кристаллический детектор установлен непосредственно в головке измерительной линии, и прибор 28ИМ фактически используется как усилитель переменного напряжения.

можно определить n. Распределение $E(z)$ нетрудно рассчитать для волновода с закороченным концом (металлической заглушкой), когда фаза отражённой волны $\varphi = \pi$, а $\rho = 1$. Как следует из (17), электрическое поле в этом случае имеет вид:

$$E(z) = E_0 e^{-ik_z z}(1 - e^{2ik_z z})e^{i\omega t} = E_0 e^{i\omega t}(e^{-ik_z z} - e^{ik_z z}) = \\ = 2E_0 e^{i\omega t}\sin(k_z z) \sim \sin(k_z z). \quad (24)$$

Здесь z — смещение от узла.

Меняя нагрузку на выходе измерительной линии (B на рис. 2) и сравнивая максимальное и минимальное показания вольтметра, можно рассчитать коэффициент стоячей волны (к.с.в.) и коэффициент отражения ρ.

Б. Волны в волноводе при частоте ниже критической

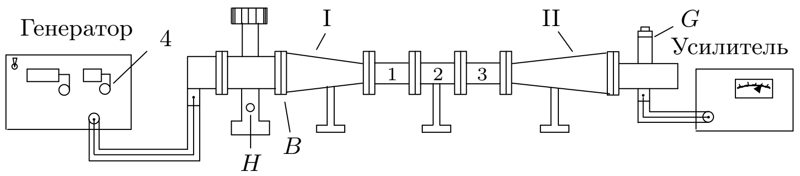

Рис. 3. Схема для исследования затухания

Для исследования затухания волн в волноводе при частоте ниже критической используются те же генератор, усилитель, измерительная линия и дополнительный набор волноводов с отдельной детекторной головкой G (рис. 3). Дополнительный набор начинается и заканчивается волноводами переменного сечения I и II. Между ними можно разместить 1, 2 или 3 одинаковых отрезка с постоянным сечением. В такой системе волны с частотами меньше критической экспоненциально затухают.

Мощность сигнала на выходе из волновода W можно связать с мощностью входного сигнала W_0 двумя способами:

$$W = W_0\, e^{-\alpha z} \text{ или } W = W_0\, 10^{-\beta z} \ (z \text{ — длина волновода}).$$

Коэффициент (αz) измеряется в *не́перах* (Нп). 1 непер соответствует отношению интенсивностей, равному основанию натуральных логарифмов. Коэффициент (βz) принято измерять в *децибелах* [дБ]: один бел соответствует уменьшению мощности в 10 раз; децибел — одна десятая бела. Измеренное в децибелах затухание определяется формулой

$$(\beta z)\ [\text{дБ}] \ = \ 10\ \lg \frac{W_0}{W}.$$

Из этого определения вытекает, что

$$\alpha \left[\frac{\text{Нп}}{\text{см}}\right] \ = \ 2{,}3 \cdot \beta \left[\frac{\text{Б}}{\text{см}}\right]. \quad (25)$$

Если при уменьшении количества вставок волновода поддерживать интенсивность выходного сигнала постоянной, то входной сигнал следует ослабить. Степень ослабления γ зависит от длины волновода z ($\gamma = \beta z$) и измеряется по шкале генератора в децибелах. Именно таким образом в эксперименте определяется коэффициент затухания β. Его можно сравнить с коэффициентом α, рассчитанным теоретически. Как следует из (17), в закритическом волноводе при квадратичном детектировании интенсивность сигнала падает по закону $E^2 \sim e^{-\alpha z}$, где α — коэффициент затухания:

$$\alpha = 2ik_z.$$

Подставляя волновое число из (15) и заменяя частоты с помощью (10) и (12), найдём

$$\alpha = 2ik_z = \frac{2\omega}{c}\sqrt{\left(\frac{\omega_{\text{кр}}}{\omega}\right)^2 - 1} = \frac{2\pi}{a}\sqrt{1 - \left(\frac{2a}{\lambda_0}\right)^2}. \quad (26)$$

Здесь $\lambda_0 = c/\nu = 3{,}22$ см — длина волны в свободном пространстве, соответствующая рабочей частоте $\nu = 9320$ МГц, $a = 1{,}6$ см — размер широкой стенки волновода-вставки.

ЗАДАНИЕ

В работе предлагается при частоте выше критической исследовать стоячую волну в измерительной линии (рис. 2): измерив распределение сигнала вдоль волновода, рассчитать фазовую скорость и определить характер детектирования (линейный, квадратичный и т.д.); затем, меняя нагрузку на выходе волновода (заглушка, открытый конец или поглотитель), определить коэффициенты отражения электромагнитной волны. При частоте ниже критической предлагается определить коэффициент затухания волны в сборном волноводе (рис. 3) и сравнить с теоретическим.

А. Исследование структуры волн при частоте выше критической

Мощность сигнала, снимаемого с генератора Г4-83, невелика, поэтому излучение не представляет опасности для здоровья человека. Тем не менее заглядывать в открытый волновод при включённом генераторе не рекомендуется.

I. Подготовка приборов к работе

1. Соедините коаксиальными кабелями выход 1 генератора со входом A измерительной линии (рис. 2), а детекторную секцию D — со входом 1 усилителя. Закройте выходной фланец B измерительной линии металлической пластиной (заглушкой).

   Включите в сеть генератор и усилитель. Настройку усилителя следует начинать после 15-минутного прогрева.

   Ручкой 2 генератора установите рабочую частоту выходного сигнала $\nu = 9320$ МГц. Клавиша 3, обозначенная на приборе значком (цуги), должна быть утоплена. Ручкой 4 аттенюатора (ослабителя) установите минимальное ослабление выходной мощности $\gamma = 20$ дБ. Остальные ручки генератора не используются.

   Пока прогревается усилитель, рассчитайте критическую частоту и убедитесь, что рабочая частота выше критической ($\nu_{\text{кр}} = c/2a$; $a = 23$ мм).

2. Проведите настройку усилителя в следующем порядке:

   а) тумблер 2 — КРИСТАЛЛ-БОЛОМЕТР — поставьте в положение КРИСТАЛЛ; переключатели 5 и 9 — Множители напряжения — в положение 1;

   б) тумблер 3 — Вольтметр — поставьте в положение ВЫКЛ; при этом вольтметр отключается от входа 1 усилителя; ручкой 4 — Установка нуля — приведите стрелку вольтметра к нулю;

   в) поставьте переключатель 5 — Входное напряжение — в положение К (калибровка) и заметьте положение стрелки вольтметра, (постоянное калибровочное напряжение составляет 50-100 делений);

   г) включите тумблер 3 — Вольтметр, при этом вольтметр подключается к выходу усилителя и измеряет калиброванное переменное напряжение частоты 1 кГц, которое вырабатывается собственным генератором усилителя;

   д) с помощью ручек 6 — Диапазон частот — и 7 — Плавная регулировка частоты — добейтесь максимального отклонения стрелки вольтметра; если это максимальное значение отличается от ранее зафиксированного постоянного калибровочного напряжения, то ручкой 8 — УСИЛЕНИЕ приведите его к прежнему значению[2]. На этом калибровка вольтметра закончена. При любом положении переключателя 5 (кроме «К» усилитель готов к измерениям.

3. При отражении сигнала от металлической пластины в волноводе образуется стоячая волна. Убедитесь, что усилитель реагирует на перемещение зонда вдоль измерительной линии: стрелка вольтметра должна колебаться от нулевого отклонения в узле стоячей волны до максимального значения в пучности. Если вольтметр не откликается на перемещение зонда, возможно, нарушена настройка детекторного блока D. Этот блок требует очень тонкой регулировки, поэтому рекомендуем обратиться к лаборанту. Для полной проверки работоспособности схемы убедитесь, что показания вольтметра уменьшаются при изменении частоты генератора из-за перемещения пучности от положения, в которое установлен зонд.

[2] Можно установить половину калибровочного значения и при измерениях умножать результат на два.

II. Определение длины волны СВЧ-сигнала в волноводе

4. Восстановите рабочую частоту $\nu = 9320$ МГц; перемещая зонд, настройтесь на пучность стоячей волны. Если при этом показания вольтметра превышают 1 мВ, следует ослабить сигнал, идущий с генератора, с помощью аттенюатора 4 (при напряжениях $\geqslant 1$ мВ меняется характер детектирования).
5. С помощью переключателей 5 и 9 подберите чувствительность вольтметра так, чтобы в максимуме стрелка отклонялась почти на всю шкалу. Используя весь возможный диапазон перемещения зонда вдоль измерительной линии, снимите зависимость показаний вольтметра U от положения зонда z (100 делений винта у выхода измерительной линии соответствуют 1 мм). Менять чувствительность вольтметра в течение этой серии нецелесообразно.
6. Постройте график $U = f(z)$ и определите по нему длину волны $\lambda_{\text{в}}$ в волноводе. Сравните результат с теоретическим расчётом $\lambda_{\text{в}}$ по формуле (16).

   Сравните длину волны λ_0 в открытом пространстве с критической $\lambda_{\text{кр}}$ [см. (1) и (13)].

   Рассчитайте фазовую скорость $v_{\text{ф}}$ волн в волноводе по формуле (1). Рассчитайте групповую скорость u, используя соотношение $u \cdot v_{\text{ф}} = c^2$.

III. Определение характера детектирования

7. Установите зонд в узел стоячей волны ($U = U_{\min}$); переключателями 5 и 9 подберите чувствительность вольтметра так, чтобы отклонение стрелки было заметным.

   Перемещая зонд вблизи узла (смещение от узла $z < \pm 2$ мм), оцените диапазон изменения показаний вольтметра U. Характер детектирования остаётся неизменным, если напряжение U не превышает величины $U_0 \simeq 1$ мВ. Если $U \ll 1$ мВ, увеличьте сигнал с генератора, используя аттенюатор 4.
8. Снимите зависимость U от координаты зонда внутри выбранного диапазона. Разумно в каждой точке фиксировать отклонение стрелки и множители K_5 и K_9, соответствующие переключателям 5 и 9.

9. Постройте график зависимости $\ln U$ от $\ln[\sin(k_z z)]$, где z — смещение от узла. При малых смещениях от узла ($z \lesssim 2$ мм) синус можно заменить его аргументом и построить график $\ln U = f(\ln z)$. По наклону прямой определите характер детектирования — линейный или квадратичный [см. (23) и (24)].

IV. Определение коэффициентов отражения

10. Снимите металлическую заглушку с фланца измерительной линии. Перемещая зонд, измерьте максимальное и минимальное напряжение в волне ($U_{\max} < 1$ мВ).
11. Наденьте на выходной фланец измерительной линии отрезок волновода с поглощающей нагрузкой и снова измерьте максимальное и минимальное напряжения.
12. Считая детектирование квадратичным, определите коэффициенты отражения r для открытого и закрытого волновода и для волновода с поглощающей нагрузкой [см. (21) и (22)]. Объясните полученные результаты.

Б. Исследование затухания волн при частоте ниже критической

V. Подготовка приборов к работе

13. Соберите схему согласно рис. 3: для этого установите на стойках детекторную головку G и волноводы переменного сечения I и II (фланцами меньшего размера друг к другу); закрепите между ними 3 отрезка волноводов постоянного сечения с размером длинной стороны $a = 16$ мм (следите, чтобы отрезки волноводов плотно соединялись между собой одинаковыми сторонами во фланцах); соедините сборный волновод с выходом B измерительной линии. Высоту измерительной линии можно изменять винтом H.

    Отсоедините от входа усилителя кабель, идущий от измерительной линии, и подключите к усилителю детекторную головку G.
14. Измерьте длину каждой секции.
15. Рассчитайте критическую частоту для этого волновода ($\nu_{\text{кр}} = c/2a$) и убедитесь, что рабочая частота ($\nu = 9320$ МГц) меньше критической.

VI. Измерение коэффициента затухания

16. Настройте детекторную головку на максимальную чувствительность согласно ТО, расположенному на установке (в этом упражнении ограничение $U < 1$ мВ необязательно). Установите минимальное затухание ($\gamma = 20$ дБ) сигнала с генератора и подберите чувствительность вольтметра так, чтобы стрелка отклонялась почти на всю шкалу; заметьте величины U и γ.

17. Последовательно уменьшая число промежуточных секций от трёх до нуля, каждый раз подбирайте такое ослабление γ сигнала с генератора, при котором показания вольтметра усилителя остаются неизменными.
18. Постройте график в координатах $\gamma = f(z)$, где z — полная длина подключённых секций. По наклону прямой рассчитайте коэффициент затухания $\beta = \Delta\gamma/\Delta z$ (в белах на см) и сравните с рассчитанным теоретически [см. (25) и (26)].

Контрольные вопросы

1. Используя выражения для фазовой и групповой скоростей ($v_{\text{ф}} = \omega/k$, $u = d\omega/dk$) и формулу (15), покажите, что в волноводе справедливо соотношение: $u \cdot v_{\text{ф}} = c^2$.
2. Как направлен вектор Пойнтинга в волноводе?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. — Т. III. Электричество. — М.: Наука, 1983. § 84.
2. *Фейнмановские* лекции по физике. Т. 6. Электродинамика. — М.: Наука, 1966. Гл. 24.
3. *Кингсеп А.С., Локшин Г.Р., Ольхов О.А.* Основы Физики. Т. I. Механика, электричество и магнетизм, колебания и волны, волновая оптика. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. Ч. II, Гл. 8, § 8.4; Ч. III, Гл. 6, § 6.7.

Рассмотрим волновод, представляющий собой металлическую трубу прямоугольного сечения, как показано на рис. Д.1.

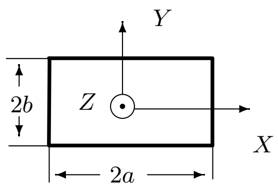

Рис. Д.1

Направим ось z вдоль трубы волновода, а оси x и y соответственно вдоль длинной и короткой сторон сечения волновода. Металлические стенки волновода имеют координаты

$$x_1 = a;\ x_2 = -a;\ y_1 = b;\ y_2 = -b.$$

Пусть далее волна, распространяющаяся по волноводу, будет поляризована вдоль оси y:

$$\boldsymbol{E} = (0, E_0, 0).$$

Распространение волны, поляризованной вдоль оси x, рассмотрим ниже. Вектор напряжённости электрического поля волны может быть разложен по осям x и y, поэтому указанные рассмотрения исчерпывают все возможные поляризации.

Волновое уравнение для волны заданной поляризации имеет вид

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \frac{n^2}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}, \tag{Д.1}$$

где n — показатель преломления среды внутри трубы волновода, c — скорость света в пустоте. Исходя из представления о распространении электромагнитных волн в однородной среде, мы можем быть уверены, что волна может распространяться вдоль оси z волновода, тогда как относительно направлений x и y такой уверенности нет из-за металлических стенок. Можно представить, что некоторое распределение поля $F(x,y)$ распространяется как волна в направлении z. В приближении плоской волны, поляризованной вдоль оси y, распределение $F(x,y)$ зависит только от координаты x, поэтому решение уравнения (Д.1) ищем в виде

$$E = E_0 F(x) e^{i(\omega t - k_z z)}, \tag{Д.2}$$

где ω — частота электромагнитной волны, k_z — проекция волнового вектора плоской волны на направление z. После подстановки решения (Д.2) в волновое уравнение (Д.1) получаем уравнение для распределения $F(x)$ поля волны вдоль оси x:

$$\frac{d^2 F(x)}{dx^2} + \left(\frac{\omega^2 n^2}{c^2} - k_z^2\right) F(x) = 0\,. \tag{Д.3}$$

Заметим, что

$$k_0 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{Д.4}$$

— это волновой вектор плоской волны в пустоте, а $k_0 n$ — волновой вектор в среде с показателем преломления n.

Уравнение (Д.3) является уравнением гармонических колебаний (правда, не во времени, а в пространстве) с пространственной частотой

$$\Omega = \sqrt{k_0^2 n^2 - k_z^2}. \tag{Д.5}$$

Из структуры выражения (Д.5) легко понять, что пространственная частота Ω есть проекция волнового вектора $k_0 n$ на направление x, т.е. $k_x = \Omega$.

Рассмотрим рис. Д.2. Плоская волна с волновым вектором $k_0 n$ падает на стенку волновода под углом θ. Проекции волнового вектора $k_0 n$ на ось z

$$k_z = k_0 n \sin\theta,$$

а на ось x —

$$k_x = \Omega = k_0 n \cos\theta.$$

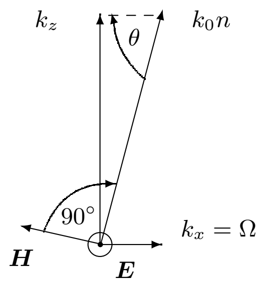

Рис. Д.2

Вектор напряжённости $\boldsymbol{E}$ поля волны перпендикулярен плоскости рисунка, так как $\boldsymbol{E}$ параллельно оси y. Вектор $\boldsymbol{H}$ магнитного поля волны перпендикулярен как $\boldsymbol{E}$, так и волновому вектору $k_0 n$. Видно, что волна в волноводе не является чисто поперечной волной и имеет продольную составляющую поля H_z. Такая волна называется H-*волной*. Если бы вдоль оси y была ориентирована H-компонента электромагнитного поля волны, то напряжённость $\boldsymbol{E}$ электрического поля имела бы продольную составляющую E_z и волна называлась бы E-*волной*.

Решением уравнения (Д.3) является:

$$F(x) = A\cos\Omega x + B\sin\Omega x. \tag{Д.6}$$

Это решение представляет собой стоячую волну (нет зависимости от времени) в направлении x, ограниченном стенками волновода в координатах $x_1 = a$; $x_2 = -a$. Решение (Д.6) содержит две функции, отличающиеся симметрией: симметричную $F_s = A\cos\Omega x$, $F_s(-x) = F_s(x)$ и антисимметричную $F_u = B\sin\Omega x$, $F_u(-x) = -F_u(x)$. При возбуждении волновода симметричным полем по волноводу будет распространяться волна с симметричным распределением $F_s(x)$, при возбуждении волновода антисимметричным полем реализуется антисимметричное распределение $F_u(x)$.

Учтём теперь граничные условия. Поскольку внутри металла электрическое поле отсутствует, то граничные условия будут:

$$\begin{aligned} &F_s(x=a)=0; \quad F_s(x=-a)=0; \\ &F_u(x=a)=0; \quad F_u(x=-a)=0. \end{aligned} \tag{Д.7}$$

Для симметричных решений тем самым получаются условия:

$$\cos\Omega a = 0 \quad \Longrightarrow \quad a\sqrt{k_0^2n^2-k_z^2}=(2m_s+1)\frac{\pi}{2}; \quad m_s=0,1,2,\ldots \tag{Д.8}$$

Из уравнения (Д.8) непосредственно следует, что проекция волнового вектора k_z не может принимать произвольные значения из диапазона $0 \leqslant k_z \leqslant k_0 n$, и что значения k_z квантуются по числу m_s:

$$k_z=\sqrt{k_0^2n^2-\left[\frac{(2m_s+1)\pi}{2a}\right]^2}. \tag{Д.9}$$

Квантование возникает всегда из-за необходимости выполнения граничных условий. Волна начинает квантоваться, когда её распространение ограничивают.

Поскольку проекция k_z волнового вектора $k_0 n$ на ось z есть действительная величина, то подкоренное выражение в равенстве (Д.9) должно быть величиной положительной, что с учётом (Д.4) приводит к условию:

$$0 \leqslant \frac{(2m_s+1)\lambda}{4a\,n} \leqslant 1. \tag{Д.10}$$

Таким образом, число возможных решений также ограничено:

$$m_{s\,\max} \leqslant \frac{2an}{\lambda}-\frac{1}{2}. \tag{Д.11}$$

Каждое такое решение называется *модой волновода* (в частности, *симметричной модой*). Максимальное целое число $m_{s\,\max}$ определяет число симметричных мод, которые могут быть возбуждены в волноводе.

Вернёмся теперь к условиям (Д.7) и рассмотрим граничные условия для антисимметричных решений. Вместо (Д.8) получаем условие квантования:

$$\sin\Omega a = 0 \quad \Longrightarrow \quad a\sqrt{k_0^2n^2-k_z^2}=\frac{2m_u\pi}{2}; \quad m_u=0,1,2,\ldots \tag{Д.12}$$

Вместо (Д.10) получим условие

$$0 \leqslant \frac{m_u\lambda}{2a\,n} \leqslant 1 \tag{Д.13}$$

и максимальное число антисимметричных мод

$$m_{u\,\max} \leqslant \frac{2an}{\lambda}. \tag{Д.14}$$

Можно объединить условия (Д.8) и (Д.12), заметив, что условиям (Д.8) для симметричных функций соответствуют нечётные значения чисел $p=2m+1$ ($p=1,3,5,\ldots$), а условиям (Д.12) для антисимметричных решений соответствуют чётные значения чисел $p=2m$ ($p=2,4,6,\ldots$). Поэтому оба условия (Д.10) и (Д.13) можно записать в виде

$$0 \leqslant \frac{p\lambda}{4an} \leqslant 1; \quad p=1,2,3,\ldots, \tag{Д.15}$$

а условия (Д.8) и (Д.12) — в виде одного условия:

$$ak_0n\sqrt{1-\left(\frac{k_z}{k_0n}\right)^2}=\frac{p\pi}{2}; \quad p=1,2,3,\ldots \tag{Д.16}$$

Значения, которые может принимать в волноводе проекция волнового вектора k_z:

$$k_z=\sqrt{k_0^2n^2-\left(\frac{p\pi}{2a}\right)^2}; \quad p=1,2,3,\ldots \tag{Д.17}$$

Из условия (Д.15) следует, что для каждой моды p волновода с характерным размером a и показателем преломления n имеется максимальная длина волны $\lambda_{p\,\max}$ и соответственно наименьшая частота $\nu_{p\,\min}$ ($\omega_{p\,\min} = 2\pi\nu_{p\,\min}$):

$$\lambda_{p\,\max}=\frac{4an}{p}; \qquad \nu_{p\,\min}=\frac{cp}{4an}. \tag{Д.18}$$

Если частота излучения в волноводе становится меньше $\nu_{p\,\min}$ и удовлетворяет соотношению $\nu_{(p-1)\,\min} < \nu < \nu_{p\,\min}$, то в волноводе не может быть возбуждена p-мода, и возбуждаются все моды от первой до $(p-1)$-моды. При дальнейшем уменьшении частоты сокращается число мод, которые могут быть возбуждены в волноводе, и, в конце концов, остаётся единственная мода, удовлетворяющая условию

$$\frac{c}{4an} < \nu < \frac{2c}{4an}$$

с критической частотой $\nu_{кр}$ и длиной волны $\lambda_{кр}$:

$$\nu_{кр} = \frac{c}{4an}, \qquad \lambda_{кр} = 4an. \tag{Д.19}$$

На частоте $\nu < \nu_{кр}$ невозможно распространение волны по волноводу. Попытаемся понять физическую причину этого ограничения. Из условия (Д.17) при $p = 1$ следует:

$$k_{1z} = k_0 n\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2} = k_0 n\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{кр}}{\omega}\right)^2}, \tag{Д.20}$$

т.е. при уменьшении рабочей частоты ω до $\omega < \omega_{кр}$ проекция волнового вектора k_z уменьшается и становится мнимой:

$$k_{1z} = i\, k_0 n\sqrt{\left(\frac{\omega_{кр}}{\omega}\right)^2 - 1} \quad \text{при } \omega < \omega_{кр}. \tag{Д.21}$$

Подставив выражение (Д.22) в решение (Д.2), мы получаем экспоненциальное затухание волны в направлении распространения z:

$$E = E_0 F(x) e^{-k_0 n\sqrt{(\omega_{кр}/\omega)^2 - 1}\, z} \cdot e^{iwt}. \tag{Д.22}$$

Таким образом, невозможность распространения волны следует понимать как её экспоненциальное затухание в направлении распространения, то есть волна не перестаёт распространяться по волноводу в случае $\omega < \omega_{кр}$, а распространяется с затуханием, причём тем меньшим, чем ближе рабочая частота к критической. Если волновод короткий, то распространение «закритической» волны будет мало отличаться от «докритической».

Распространение волны, поляризованной вдоль оси x: $\boldsymbol{E} = (E_0, 0, 0)$ в том же самом волноводе (рис. Д.1) исследуем тем же способом. Решение уравнения (Д.1) ищем в виде

$$E = E_0 F(y) e^{i(\omega t - k_z z)}. \tag{Д.23}$$

Распределение $F(y)$ получим аналогично распределению (Д.6) (с тем же самым выражением (Д.5) для пространственной частоты Ω):

$$F(y) = C\cos\Omega y + D\sin\Omega y. \tag{Д.24}$$

Решения таким же образом разбиваются на симметричные и антисимметричные функции, но граничные условия будут иметь другой вид (a заменяется на b, x — на y):

$$\begin{aligned} &F_s(y = b) = 0; \quad F_s(y = -b) = 0; \\ &F_u(x = b) = 0; \quad F_u(x = -b) = 0. \end{aligned} \tag{Д.25}$$

Все преобразования с симметричными и антисимметричными модами проводятся аналогично волне с поляризацией $\boldsymbol{E} \parallel y$ и окончательно для волны с $\boldsymbol{E} \parallel x$ получим разрешённые значения проекции k_z волнового вектора $k_0 n$:

$$k_z = \sqrt{k_0^2 n^2 - \left(\frac{q\pi}{2b}\right)^2}, \quad q = 1, 2, 3, ... \tag{Д.26}$$

Как и ранее, нечётные значения q относятся к симметричным функциям, а чётные — к антисимметричным. Аналогично условию (Д.15) получим условие для мод ортогональной поляризации ($\boldsymbol{E} \parallel x$):

$$0 \leqslant \frac{q\lambda}{4bn} \leqslant 1; \quad q = 1, 2, 3, ... \tag{Д.27}$$

Из условия (Д.27) следует, что для каждой моды q волновода с характерным размером b и показателем преломления n имеется максимальная длина волны $\lambda_{q\,\max}$ и соответственно наименьшая частота $\nu_{q\,\min}$ ($\omega_{q\,\min} = 2\pi\nu_{q\,\min}$):

$$\lambda_{q\,\max} = \frac{4bn}{q}, \qquad \nu_{q\,\min} = \frac{cq}{4bn}. \tag{Д.28}$$

Если частота излучения в волноводе становится меньше $\nu_{q\,\min}$ и удовлетворяет соотношению $\nu_{(q-1)\,\min} < \nu < \nu_{q\,\min}$, то в волноводе не может быть возбуждена q-мода, и возбуждаются все моды от первой до $(q-1)$-моды. При дальнейшем уменьшении частоты сокращается число мод, которые могут быть возбуждены в волноводе, и, в конце концов, остаётся единственная мода, удовлетворяющая условию

$$\frac{c}{4bn} < \nu < \frac{2c}{4bn}$$

с критической частотой $\nu_{кр}$ и длиной волны $\lambda_{кр}$:

$$\nu_{кр} = \frac{c}{4bn}, \qquad \lambda_{кр} = 4dn. \tag{Д.29}$$

На частоте $\nu < \nu_{кр}$ невозможно распространение волны по волноводу в смысле, изложенном выше [см. (Д.20 — Д.22)]. Отметим, что критическая частота для волн x-поляризации (Д.29) больше, чем для волн y-поляризации (Д.19), т.к. $a > b$. Поэтому на достаточно низкой частоте возможно распространение по волноводу единственной моды с частотой ν, удовлетворяющей соотношению:

$$\frac{c}{4an} < \nu < \frac{c}{4bn}. \tag{Д.30}$$

Естественно, что такая мода будет иметь y-поляризацию ($\boldsymbol{E} \parallel y$).

Рассматривая многомодовый режим волновода, следует иметь в виду, что волновой вектор $k_0 n$ при произвольной поляризации $\boldsymbol{E} = (E_x, E_y, 0)$ (H-волна) также должен быть разложен по осям x и y. При этом корень, входящий в выражение (Д.5), представляют в виде:

$$\sqrt{k_0^2\, n^2 - k_z^2} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}. \qquad \text{(Д.31)}$$

Из этого выражения следует, что максимальную длину волны $\lambda_{pq\,\max}$, определяющую распространение излучения в режиме p-мод y-поляризации и q-мод y-поляризации, можно получить из выражения

$$\frac{1}{\lambda_{pq\,\max}^2} = \frac{1}{\lambda_{x\,\max}^2} + \frac{1}{\lambda_{y\,\max}^2} = \left(\frac{p}{4an}\right)^2 + \left(\frac{q}{4bn}\right)^2, \qquad \text{(Д.32)}$$

а минимальную частоту — из выражения

$$\nu_{pq\,\min}^2 = \left(\frac{pc}{4an}\right)^2 + \left(\frac{qc}{4bn}\right)^2. \qquad \text{(Д.33)}$$

Рассмотрим ещё одно важное понятие в теории волноводов — скорость распространения излучения. В волноводах фазовая скорость $v_{\text{ф}}$ волны отличается от групповой скорости $v_{\text{гр}}$ (в отличие от распространения плоской волны в свободном однородном пространстве). Фазовая скорость — это скорость перемещения фазовой поверхности. В волноводе она определяется проекцией волнового вектора k_z:

$$v_{\text{ф}} = \frac{\omega}{k_z} = \frac{k_0 c}{k_0 n \sin\theta} = \frac{c}{n \sin\theta}. \qquad \text{(Д.34)}$$

Фазовая скорость в волноводе больше скорости света в среде с показателем преломления n. Хотя звучит это парадоксально, но понять можно: в волноводе волна испытывает отражение, т.е. поворот фронта волны. Превышение скорости света связано именно с этим поворотом.

Гораздо более важной с практической точки зрения является групповая скорость $v_{\text{гр}}$ — это скорость, с которой данным излучением может быть передана информация. Как известно, излучением на фиксированной частоте передать сигнал невозможно. Нужно модулировать излучение, что с неизбежностью приводит к необходимости передавать излучение в некотором диапазоне частот $\Delta\omega$, то есть передавать *спектр* сигнала. Групповая скорость $v_{\text{гр}}$ зависит от этого набора частот:

$$v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk_z}, \qquad \text{(Д.35)}$$

для её вычисления нужно из выражения (Д.17) с учётом (Д.4) получить функцию $\omega(k_z)$:

$$\omega = \frac{c}{n}\sqrt{k_z^2 + \left(\frac{p\pi}{2a}\right)^2}; \quad p = 1, 2, 3, \ldots \qquad \text{(Д.36)}$$

Дифференцируя последнее выражение, получим

$$v_{p\ \text{гр}} = \frac{c}{n} k_z \sqrt{k_z^2 + \left(\frac{p\pi}{2a}\right)^2} = \frac{c}{n}\sqrt{1 - \left(\frac{p\pi}{2ak_0 n}\right)^2}. \qquad \text{(Д.37)}$$

Из выражения (Д.37) видно, что чем выше порядок моды (чем больше величина p), тем медленнее эта мода передаёт информацию. Каждая мода распространяется со своей групповой скоростью $v_{p\ \text{гр}}$. Явление распространения мод с разными групповыми скоростями называется *межмодовой дисперсией*. Это явление вредное, так как ограничивает максимальную скорость передачи информации. Предположим, что передача ведётся короткими импульсами, следующими друг за другом с частотой f. Каждый такой импульс излучения распространяется по волноводу в виде p штук мод. Пусть длина волновода L. Тогда различные моды задержат выход импульса на различные времена:

$$\Delta t_p = \frac{L}{v_{p\ \text{гр}}}.$$

В результате на выходе волновода получим набор из p импульсов, задержанных на времена от

$$\Delta t_1 = \frac{L}{v_{1\ \text{гр}}} \quad \text{до} \quad \Delta t_{p\ \max} = \frac{L}{v_{\text{p max гр}}}.$$

Все эти импульсы должны восприниматься приёмником как один импульс, то есть длительность выходящего сигнала станет равной

$$(\Delta t_{p\,\max} - \Delta t_1).$$

В этом случае говорят, что произошло *уширение импульса*. Если следующий сигнальный импульс будет передан через время

$$\tau = \frac{1}{f} < (\Delta t_{p\,\max} - \Delta t_1),$$

то расширенный импульс наложится на передаваемый, и второй импульс не будет принят приёмником. Передача по многомодовому волноводу ограничивается межмодовой дисперсией.